المحاضرة النظرية السابعة

سننتقل الآن إلى دراسة النوع الثاني من التكامل وهو التكامل المحدد

مقدمة وتمهيد:

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة ومحدودة على مجال مغلق $[a,b]$ ومحدود دائماً $\int_a^b f(x)$ حيث a الحد الأدنى و b الحد الأعلى

التكامل المحدد هو عبارة عن قيمة عددية

* أما التكامل غير المحدود فهو عبارة عن ($\int f(x)dx = F(x)+c$) عائلة من التوابع لو قمنا باشتقاق أي منها لنحصل الدالة المستكاملة

تجزئة مجال:

يمكن تجزئة مجال إلى عدد لانهائي من المجالات

تجزئة المجال: هي عبارة عن مجموعة منتهية مرتبة من النقاط تكون على شكل $[a = x_0 < x_1 < x_{n-1} < x_n = b]$ $T =$ وتسمى إلى هذا المجال

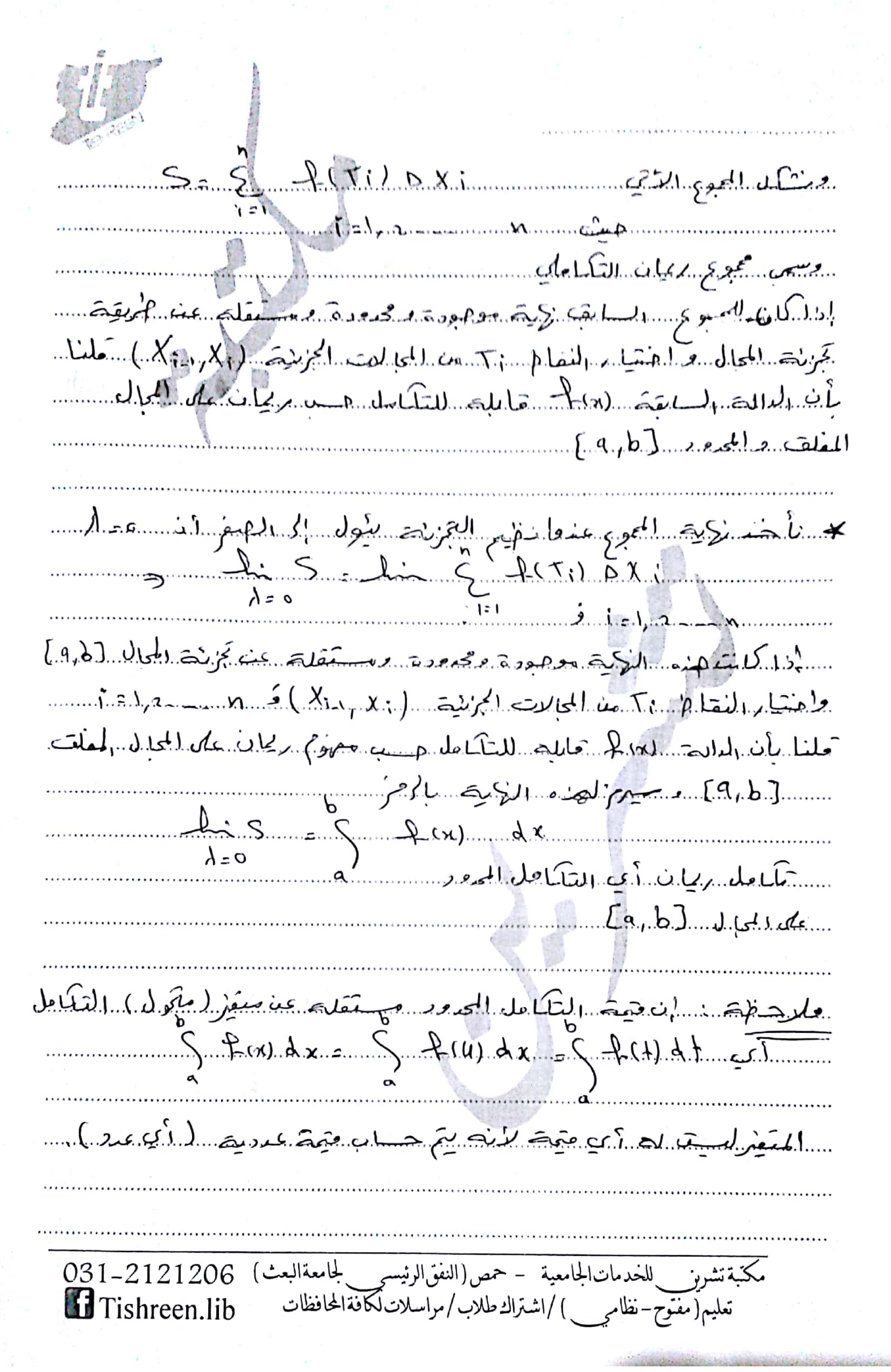
دليل أو نظير أو مقياس أو معيار التجزئة: هو أطوال المجالات الجزئية ونرمز له بـ $\lambda = \max [x_i - x_{i-1}]$ في $1 \leq i \leq n$

* تعريف التكامل المحدد *

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة ومحدودة على المجال المغلق $[a,b]$

ولتكن T تجزئة ما للمجال المغلق $[a,b]$

ولنختار النقاط (k_i) حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ من المجالات $[x_{i-1}, x_i]$



وتشكل المجموع الآتي $S = \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\,\Delta X_i$

حيث $i = 1, 2, \ldots, n$

ونسمي مجموع ريمان التكاملي

إذا كان المجموع السابق نهاية موجودة ومحدودة ومستقلة عن طريقة تجزئة المجال واختيار النقاط T_i من المجالات الجزئية (X_{i-1}, X_i) قلنا بأن الدالة السابقة $f(x)$ قابلة للتكامل حسب ريمان على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$

* نأخذ نهاية المجموع عندما نقسم التجزئة n تؤول إلى الصفر أي $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} S = \lim \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\,\Delta X_i$$

و $i = 1, 2, \ldots, n$

إذا كانت هذه النهاية موجودة ومحدودة ومستقلة عن تجزئة المجال $[a,b]$ واختيار النقاط T_i من المجالات الجزئية (X_{i-1}, X_i) و $i = 1, 2, \ldots, n$ قلنا بأن الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل حسب مفهوم ريمان على المجال المغلق $[a,b]$ ونرمز لهذه النهاية بالرمز

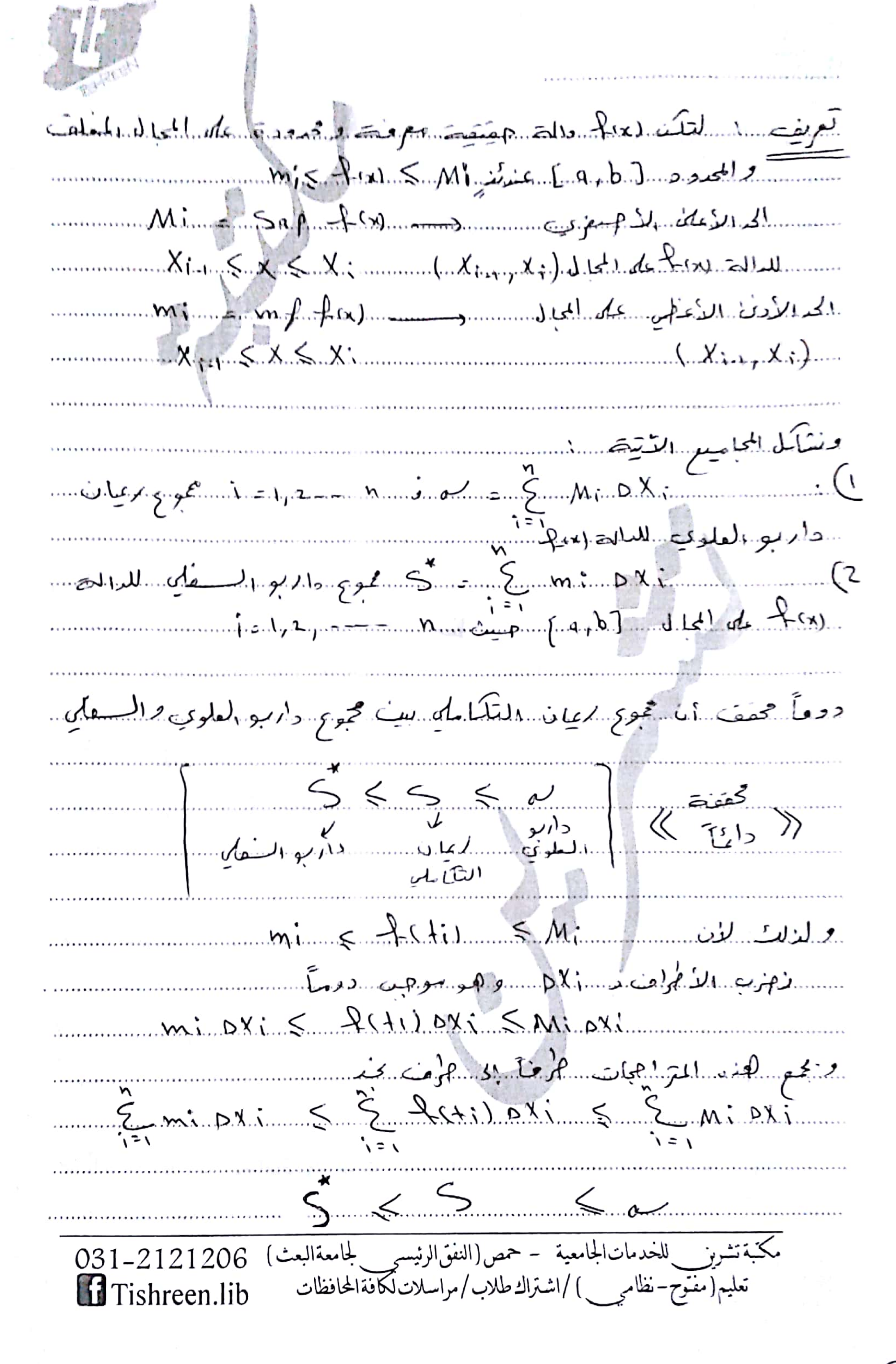
$$\lim_{\lambda \to 0} S = \int_a^b f(x)\,dx$$

تكامل ريمان أي التكامل المحدود على المجال $[a,b]$

ملاحظة: إن قيمة التكامل المحدود مستقلة عن متغير (مجهول) التكامل أي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

المتغير ليست له أي قيمة لأنه يتم حساب قيمة عددية (أي عدد).



تعريف: لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة ومحدودة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ عندئذٍ $m_i \le f(x) \le M_i$

الحد الأعلى الأصغري $\longrightarrow$ $M_i = \sup f(x)$

للدالة $f(x)$ على المجال (x_{i-1}, x_i) : $x_{i-1} \le x \le x_i$

الحد الأدنى الأعظمي على المجال $\longrightarrow$ $m_i = \inf f(x)$

(x_{i-1}, x_i) : $x_{i-1} \le x \le x_i$

ونشكل المجاميع الآتية:

1) $\sigma = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$: $i = 1, 2, \ldots, n$ مجموع ريمان داربو العلوي للدالة $f(x)$

2) $S^* = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ مجموع داربو السفلي للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ حيث $i = 1, 2, \ldots, n$

دوماً محقق أن مجموع ريمان التكاملي بين مجموع داربو العلوي والسفلي

$$S^* \le S \le \sigma$$

(S^*: داربو السفلي، S: ريمان التكاملي، σ: داربو العلوي) «محققة دائماً»

وذلك لأن $m_i \le f(t_i) \le M_i$

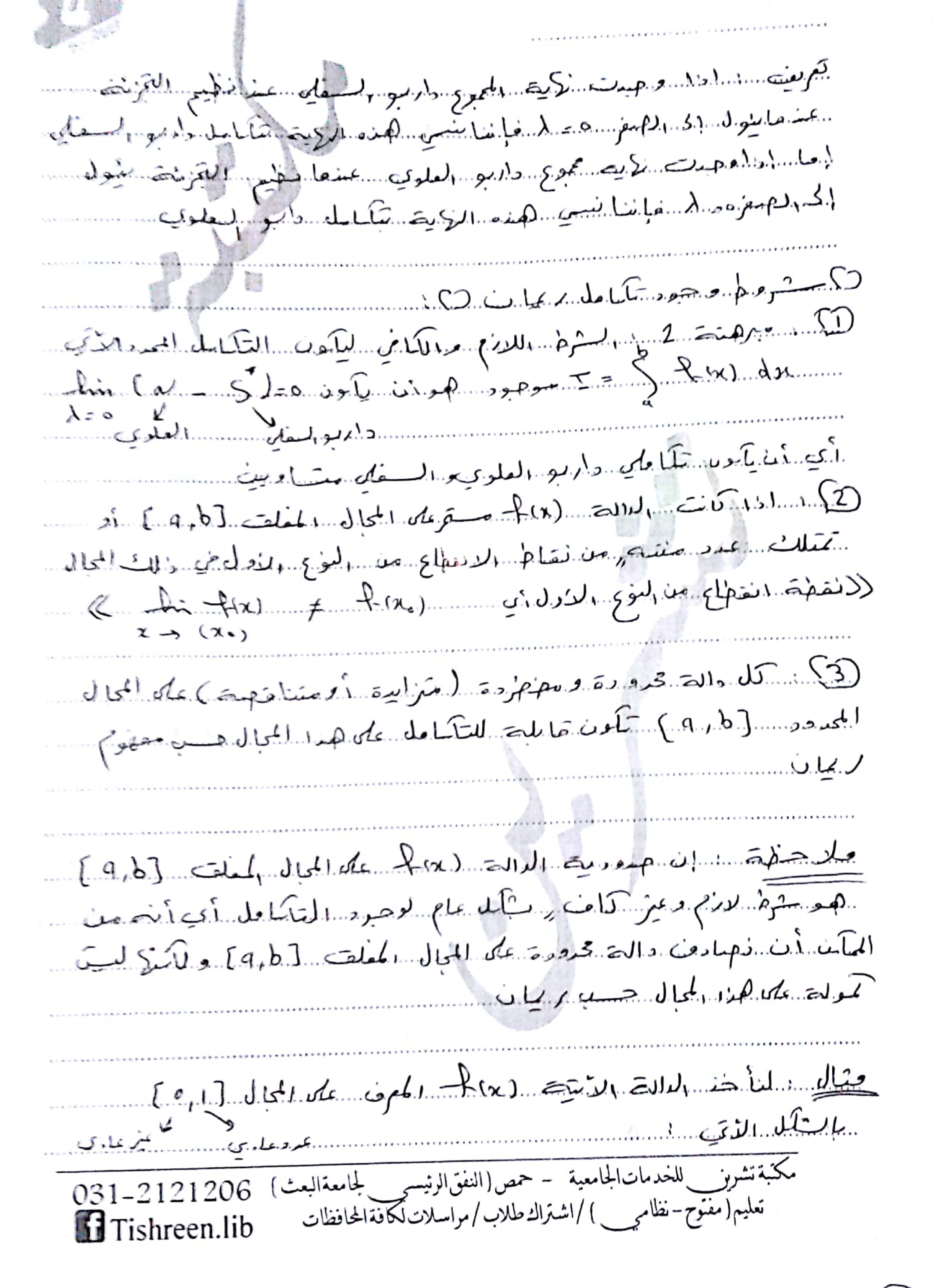
نضرب الأطراف بـ Δx_i وهو موجب دوماً

$$m_i \Delta x_i \le f(t_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$$

ونجمع هذه المتراجحات طرفاً إلى طرف نجد

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$S^* \le S \le \sigma$$



تعريف: إذا وجدت نهاية لمجموع داربو السفلي عندما نجعل التجزئة عندما يؤول إلى الصفر $\lambda \to 0$ فإننا نسمي هذه النهاية تكامل داربو السفلي

أما إذا وجدت نهاية مجموع داربو العلوي عندما نجعل التجزئة يؤول إلى الصفر $\lambda \to 0$ فإننا نسمي هذه النهاية تكامل داربو العلوي

شروط وجود تكامل ريمان:

(1) مبرهنة 2: الشرط اللازم والكافي ليكون التكامل المحدد الآتي $I = \int_a^b f(x)\,dx$ موجوداً هو أن يكون $\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$

(S: العلوي، s: داربو السفلي)

أي أنه يكون تكاملي داربو العلوي والسفلي متساويين

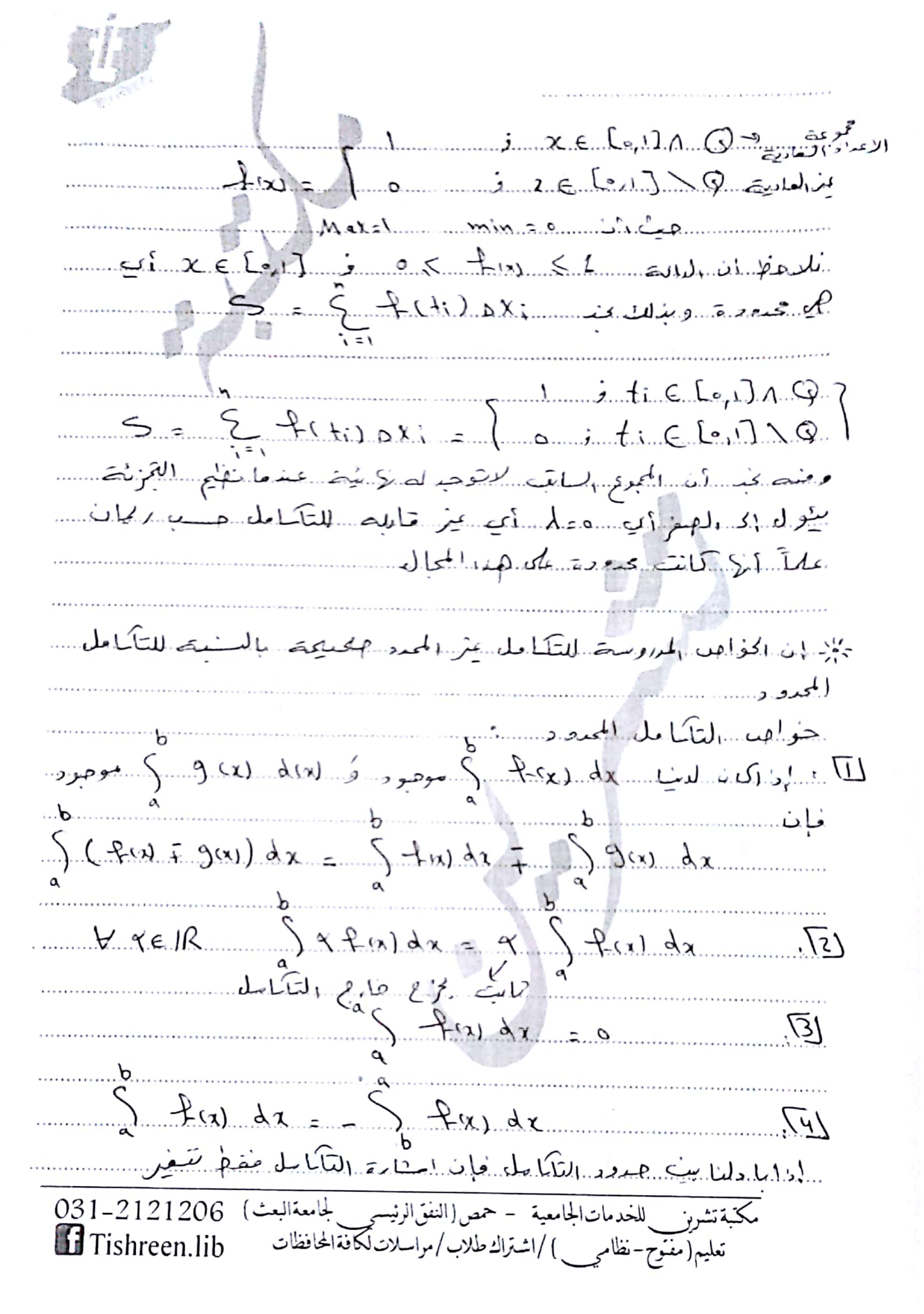
(2) إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ أو تمتلك عدد منتهٍ من نقاط الانقطاع من النوع الأول في ذلك المجال «النقطة انقطاع من النوع الأول أي $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$»

(3) كل دالة محدودة ومطردة (متزايدة أو متناقصة) على المجال المحدود $[a,b]$ تكون قابلة للتكامل على هذا المجال حسب مفهوم ريمان

ملاحظة: إن محدودية الدالة $f(x)$ على المجال المغلق $[a,b]$ هو شرط لازم وغير كافٍ بشكل عام لوجود التكامل أي أنه من الممكن أن نصادف دالة محدودة على المجال المغلق $[a,b]$ ولكنها ليست قابلة للتكامل على هذا المجال حسب ريمان

مثال: لنأخذ الدالة الآتية $f(x)$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل الآتي:

عدد عادي — غير عادي



$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \to \text{مجموعة الأعداد النسبية} \\ 0 & ; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \quad \text{غير العادية} \end{cases}$$

حيث أن $\min = 0$ $\quad Max = 1$

نلاحظ أن الدالة $0 \le f(x) \le 1$ في $x \in [0,1]$ أي

هي محدودة وبذلك نجد $S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i$

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i = \begin{cases} 1 & ; t_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; t_i \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ومنه نجد أن المجموع السابق لا توجد له نهاية عندما نظيم التجزئة يئول إلى الصفر أي $\lambda = 0$ أي غير قابلة للتكامل حسب ريمان علماً أنها كانت محدودة على هذا المجال

☀ إن الخواص المدروسة للتكامل غير المحدد صحيحة بالنسبة للتكامل المحدود

خواص التكامل المحدود :

1 : إذا كان لدينا $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود و $\int_a^b g(x)\,d(x)$ موجود فإن

$$\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$$

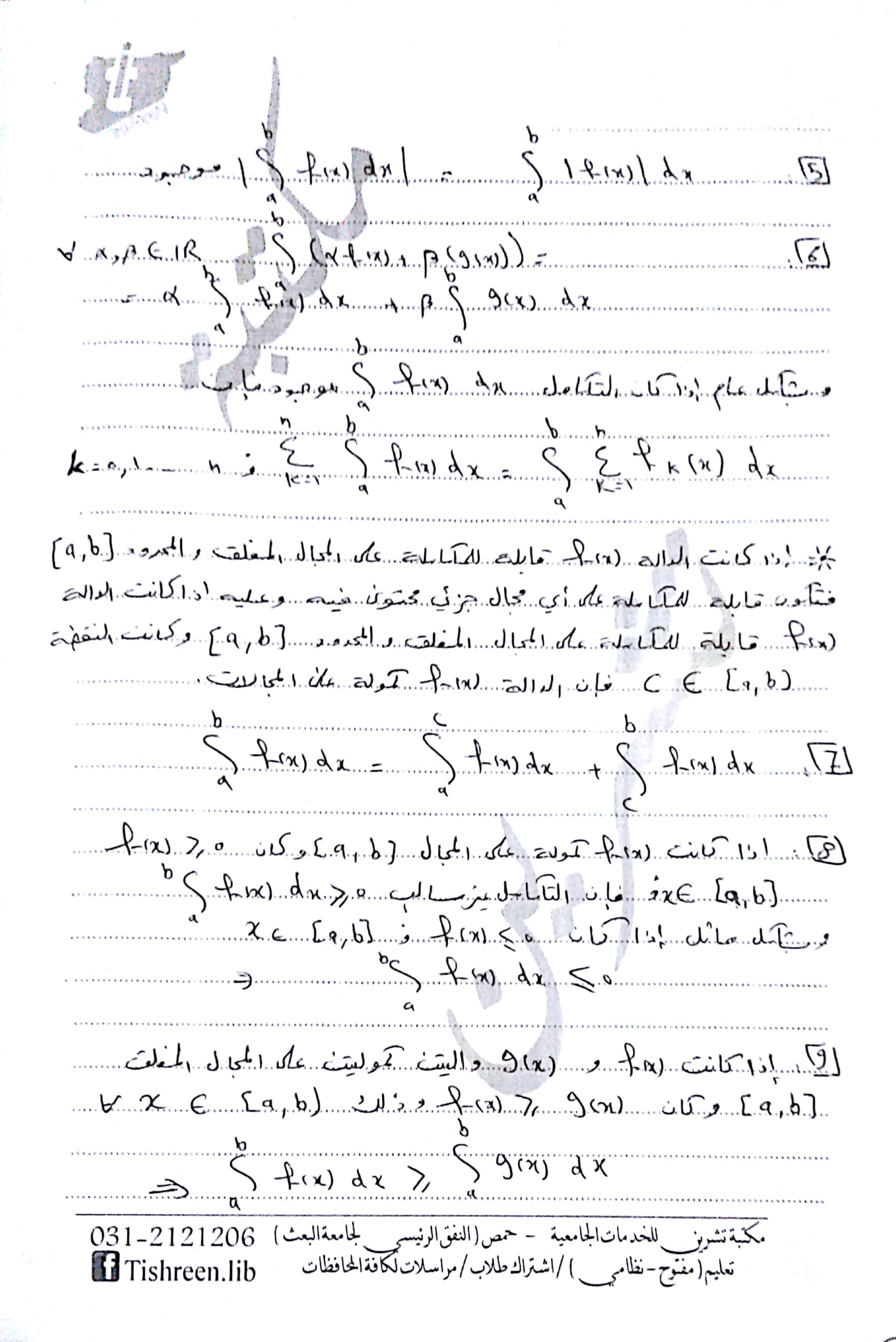
2. $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

ثابت يخرج خارج التكامل

3. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

إذا بادلنا بين حدود التكامل فإن إشارة التكامل فقط تتغير



5. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ موجود

6. $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$: $\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta\, g(x)\right) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

وبشكل عام إذا كان التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ موجوداً فإن

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx \quad ; \quad k=0,1,\dots,n$$

* إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للمكاملة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ فستكون قابلة للمكاملة على أي مجال جزئي محتوى فيه وعليه إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للمكاملة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ وكانت النقطة $c \in [a,b]$ فإن الدالة $f(x)$ مكمولة على المجالات.

7. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

8. إذا كانت $f(x)$ مكمولة على المجال $[a,b]$ وكان $f(x) \geq 0$ ∀ $x \in [a,b]$ فإن التكامل غير سالب $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

وبشكل مماثل إذا كان $f(x) \leq 0$ ∀ $x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$$

9. إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مكموليتين على المجال المغلق $[a,b]$ وكان $f(x) \geq g(x)$ وذلك $\forall\, x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

مبرهنة: إذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة حسب ريمان على المجال $[a,b]$ وتحقق العلاقة $m \le f(x) \le M$

يوجد μ بحيث يكون $m \le \mu \le M$

طول المجال $\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)$

بشكل خاص إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ فإنه توجد نقطة مناسبة $c \in [a,b]$ بحيث يكون التكامل $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,[b-a]$

* تعريف: التكامل المحدود بحد أعلى (متغير متحول) إذا كانت $f(x)$ محدودة حسب ريمان على المجال المغلق $[a,b]$ فإن $\forall x \in [a,b]$

$x \leftarrow$ متغير

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

موجود ويسمى تكاملاً محدداً بحد أعلى

ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة ومستمرة على المجال $[a,b]$ فإن مشتق التكامل المحدود بحد أعلى (متغير) موجود ويساوي الدالة المكاملة بعد تغير المتحول بالمتحول الأعلى أي

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = f(x)$$

حساب التكامل المحدود

* كل دالة مستمرة على مجموعة (مغلقة متراصة) (ومحدودة) تكون محدودة عليها
* كل دالة مستمرة على مجموعة متراصة (مغلقة ومحدودة) تكون

مستمرة على المجال المغلق [a, b] والمحدد

① : صيغة نيوتن لايبنتز : إذا كانت الدالة f(x) مستمرة على المجال المغلق والمحدد [a, b]

فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

انتهت المحاضرة السابعة

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

إعداد : فاطمة الشميلي